Маслов АН ИД23-1

Производственная функция — это экономическая модель, которая описывает зависимость объема выпуска продукции от затрат ресурсов (таких как труд и капитал). Рассмотрим несколько задач на производственные функции с решениями.

**Задача 1: Производственная функция Кобба-Дугласа**

**Условие:**  
Производственная функция фирмы задана уравнением Кобба-Дугласа:

Q=10⋅L^0.6⋅K^0.4, ,

где:

* Q — объем выпуска,
* L — затраты труда,
* K — затраты капитала.

1. Найдите объем выпуска, если L=100 и K=64.
2. Определите предельную производительность труда (MPL) и предельную производительность капитала (MPK) при данных значениях L и K.

Q = 10\*100^0.6 \* 64^0.4

Q = 836,51

1. **Предельная производительность труда (MPL):**  
   MPL — это производная Q по *L*:

MPL=∂Q∂L=10⋅0.6⋅L−0.4⋅K^0.4.​

Подставляем L=100 и K=64

MPL=10⋅0.6⋅100−0.4⋅640.4.

Вычисляем:

MPL=10⋅0.6⋅0.158⋅5.28≈5.00.

1. **Предельная производительность капитала (MPK):**  
   MPK — это производная Q по K:

MPK=∂Q∂K=10\*L^0.6 \* 0.4\*K^-0.6

Подставляем L=100 и K=64

MPK=10\*100^0.6 \* 0.4\*64^-0.6

Вычисляем:

MPK=5,22

**Задача 2: Эластичность выпуска по ресурсам**

**Условие:**  
Производственная функция фирмы задана уравнением:

Q=5⋅L^0.5⋅K^0.5. Найдите эластичность выпуска по труду и по капиталу.

1. Как изменится выпуск, если затраты труда увеличатся на 10%, а капитал останется неизменным?

**Решение:**

1. **Эластичность выпуска по труду: 0.5**  
   **Эластичность выпуска по капиталу: 0.5**  
   Эластичность выпуска по капиталу равна показателю степени при K.
2. **Изменение выпуска:**  
   Если затраты труда увеличатся на 10%, то изменение выпуска можно оценить с помощью эластичности:

Δ*Q*=*EL*​⋅Δ*L*

Подставляем:

Δ*Q*=0.5⋅10%=5%

Таким образом, выпуск увеличится на 5%.

**Задача 3: Постоянная отдача от масштаба**

**Условие:**  
Производственная функция фирмы задана уравнением:

Q=2⋅L^0.7⋅K^0.3.

1. Проверьте, обладает ли функция постоянной отдачей от масштаба.
2. Как изменится выпуск, если затраты труда и капитала увеличатся в 2 раза?

**Решение:**

1. **Проверка отдачи от масштаба:**  
   *Q*(*tL*,*tK*)=*t*⋅*Q*(*L*,*K*).

Для функции Q=2⋅L^0.7⋅K^0.3. Увеличим L и Kв t раз

*Q*(*tL*,*tK*)=2⋅(*tL*)^0.7⋅(*tK*)^0.3.

*Q*(*tL*,*tK*)=2⋅*t*^0.7⋅*L*^0.7⋅*t*^0.3⋅*K*^0.3=2⋅*t*^(0.7+0.3)⋅*L*^0.7⋅*K*^0.3

*Q*(*tL*,*tK*)=*t*⋅2⋅*L^*0.7⋅*K^*0.3=*t*⋅*Q*(*L*,*K*).

Таким образом, функция обладает постоянной отдачей от масштаба.

1. **Изменение выпуска:**  
   При увеличении затрат труда и капитала в 2 раза:

Если L и K увеличиваются в 2 раза, то t=2. Согласно свойству постоянной отдачи от масштаба:

*Q*(2*L*,2*K*)=2⋅*Q*(*L*,*K*)

Таким образом, выпуск увеличится в 2 раза

Оптимизационные задачи на производство благ — это задачи, в которых необходимо найти оптимальное распределение ресурсов (труда, капитала и других факторов производства) для максимизации выпуска или минимизации издержек. Рассмотрим несколько примеров таких задач с решениями.

**Задача 1: Максимизация выпуска при ограниченном бюджете**

**Условие:**  
Фирма производит блага с использованием труда (L) и капитала (K). Производственная функция задана уравнением Кобба-Дугласа:

Q=10⋅L^0.5⋅K^0.5..

Цена труда (w) составляет 5 денежных единиц, цена капитала (r) — 10 денежных единиц. Бюджет фирмы на производство — 1000 денежных единиц. Найдите оптимальные значения L и K, которые максимизируют выпуск Q*Q*.

**Решение:**

1. **Ограничение бюджета:**

*wL*+*rK*=1000

1. **Метод Лагранжа:**  
   Составляем функцию Лагранжа:

L(*L*,*K*,*λ*)=10⋅*L^*0.5⋅*K^*0.5−*λ*(5*L*+10*K*−1000).

1. **Находим частные производные и приравниваем их к нулю:**

∂*L/*∂L​=5⋅*L^*−0.5⋅*K^*0.5−5*λ*=0

∂*K/*∂L​=5⋅*L^*0.5⋅*K^*−0.5−10*λ*=0

∂L​/∂ *λ* =−(5*L*+10*K*−1000)=0

1. **Решаем систему уравнений:**  
   Из первого уравнения: 5⋅*L^*−0.5⋅*K^*0.5=5*λ*⇒*L^*−0.5⋅*K^*0.5=*λ*

Из второго уравнения: 5⋅*L^*0.5⋅*K^*−0.5=10*λ*⇒*L^*0.5⋅*K^*−0.5=2*λ*

Делим первое уравнение на второе:

*(L^*−0.5 *\*K^*0.5*) /L^*0.5\* *K^*−0.5​=2*λ/λ*​⇒*K/L*​=1/2​.

Таким образом:

K= 1/2 L

1. **Подставляем K= в бюджетное ограничение:**

Тогда:

5*L*+10*K*=1000⇒5*L*+10⋅1/2\*​*L*=1000

5*L*+5*L*=1000⇒10*L*=1000⇒*L*=100.

K=**Оптимальный выпуск:**  
Подставляем L=100 и K= 50 в производственную функцию:

**Задача 2: Минимизация издержек при заданном выпуске**

**Условие:**  
Фирма должна произвести 500 единиц блага. Производственная функция задана уравнением:

Q=5⋅L^0.4⋅K^0.6.

Цена труда (w) составляет 8 денежных единиц, цена капитала (r) — 12 денежных единиц. Найдите оптимальные значения L и K, которые минимизируют издержки.

**Решение:**

1. **Ограничение выпуска:**

5⋅*L^*0.4⋅*K^*0.6=500

1. **Метод Лагранжа:**  
   Составляем функцию Лагранжа:

L(*L*,*K*,*λ*)=8*L*+12*K*−*λ*(5⋅*L^*0.4⋅*K^*0.6−500)

1. **Находим частные производные и приравниваем их к нулю:**

∂L∂L= 8−*λ*⋅2⋅*L^*−0.6⋅*K^*0.6 = 0

∂L∂K=12−*λ*⋅3⋅*L^*0.4⋅*K^*−0.4=0

∂L∂λ=−(5⋅*L^*0.4⋅*K^*0.6−500)=0.

1. **Решаем систему уравнений:**  
   Из первого уравнения: 8=*λ*⋅2⋅*L^*−0.6⋅*K^*0.6⇒*λ*=8/2⋅*L^*0.6⋅*K^*−0.6=4⋅*L^*0.6⋅*K^*−0.6

Из второго уравнения:

12=*λ*⋅3⋅*L^*0.4⋅*K^*−0.4⇒*λ*=12/3​⋅*L^*−0.4⋅*K^*0.4=4⋅*L^*−0.4⋅*K^*0.4

Приравниваем выражения для λ: 4⋅*L^*0.6⋅*K^*−0.6=4⋅*L^*−0.4⋅*K^*0.4

Упрощаем: *L^(*0.6+0.4)⋅*K^(*−0.6−0.4)=1⇒*L*⋅*K*=1⇒*L/K*​=1

Перепишем: L = K

1. **Подставляем   в ограничение выпуска:**

Тогда: 5⋅*L^*0.4⋅*L^*0.6=500⇒5⋅*L*=500

L = 100

K = 100

1. **Минимальные издержки:**

*C*=*wL*+*rK*=8⋅100+12⋅100=800+1200=2000

*C = 2000*

**Задача 3: Оптимизация с учетом технологического прогресса**

**Условие:**  
Производственная функция фирмы задана уравнением:

Q=A⋅L^0.3⋅K^0.7,

где A — коэффициент технологического прогресса. При A=1, цена труда (w) составляет 10 денежных единиц, цена капитала (r) — 20 денежных единиц. Бюджет фирмы — 2000 денежных единиц. Найдите оптимальные значения L и K, если A увеличивается до 1.5.

**Решение:**

1. **Ограничение бюджета:**

*wL*+*rK*=2000⇒10*L*+20*K*=2000

1. **Метод Лагранжа:**  
   Составляем функцию Лагранжа:

**L(*L*,*K*,*λ*)=1.5⋅*L^*0.3⋅*K^*0.7−*λ*(10*L*+20*K*−2000)**

1. **Находим частные производные и приравниваем их к нулю:**

∂*L/*∂L​=0.45⋅*L^*−0.7⋅*K^*0.7−10*λ*=0

∂*K/*∂L​=1.05⋅*L^*0.3⋅*K^*−0.3−20*λ*=0

∂L/∂*λ* ​=−(10*L*+20*K*−2000)=0

1. **Решаем систему уравнений:**  
   Из первого уравнения:

0.45⋅*L^*−0.7⋅*K^*0.7=10*λ*⇒*λ*=0.045⋅*L^*−0.7⋅*K^*0.7

Из второго уравнения:

1.05⋅*L^*0.3⋅*K^*−0.3=20*λ*⇒*λ*=0.0525⋅*L^*0.3⋅*K^*−0.3

Делим первое уравнение на второе: *K^(*0.7+0.3)/*L^(*0.7+0.3) ​=0.0525​/0.045

Упрощаем:

*K/L*​=0.0525/​0.045≈1.1667

Таким образом:

*K*≈1.1667*L*

1. **Подставляем K≈ в бюджетное ограничение:**

Тогда:

10*L*+20⋅1.1667*L*=2000

10*L*+23.333*L*=2000⇒33.333*L*=2000⇒*L*≈60

*K*≈1.1667⋅60≈70

1. **Оптимальный выпуск:**  
   Подставляем L≈ 60 и K≈ 70 в производственную функцию:

*Q*=1.5⋅60^0.3⋅70^0.7

Вычисляем:

60^0.3≈3.73 ; 70^0.7≈22.47.

*Q*≈1.5⋅3.73⋅22.47

Тогда:

Q≈100,25.

Эти задачи демонстрируют, как оптимизационные методы применяются для принятия решений в производстве благ.